Exercices du TD2 : Variables aléatoires continues

1 Fonction de répartition, espérance, variance

Exercice 1 : La durée de vie X en années d'une télévision est supposée suivre une loi exponentielle de densité :

$$f(x) = \frac{1}{8}e^{-\frac{x}{8}}, \quad x \geq 0.$$

1) Calculer la probabilité que la télévision que vous venez d'acheter ait une durée de vie supérieure à 8 ans.

2) Vous possédez votre télévision depuis 2 ans. Quelle est la probabilité que sa durée de vie soit encore de 8 ans à partir de maintenant. Commenter et faire si possible le lien avec une loi discrète associée.

3) Quelle est la durée moyenne $\mathbb{E}(X)$ d'une télévision ? Et l'écart-type de cette durée ?

Exercice 2 : Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Quelle est la fonction de répartition de X ?

2) Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

Exercice 3 : La fonction de densité de X, variable aléatoire représentant la durée de vie en heures d'un certain composant électronique, est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 10 \\ 10/x^2 & \text{si} \quad x > 10 \end{cases}$$

1) Calculer $\mathbb{P}(X > 15)$.

2) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

3) Déterminer la fonction de répartition de X.

4) Quelle est la probabilité que parmi 6 composants, supposés indépendants, au moins 3 d'entre eux fonctionnent au moins 15 heures ?

2 Loi gaussienne

Exercice 4 : La taille, en centimètres, d'un homme âgé de 30 ans est modélisée par une loi normale, dont la moyenne est 175 et la variance 36.

1) Quel est le pourcentage d'hommes de 30 ans ayant une taille supérieure à 185 cm ?

2) Parmi les hommes mesurant plus de 180 cm, quel pourcentage dépasse 192 cm?

Indication : on pourra utiliser les tabulations suivantes des quantiles de la loi normale :

0	0.25	0.52	0.84	1.28	1.65	2.05	2.33	2.57	2.81
50%	40%	30%	20%	10%	5%	2%	1%	0.5%	0.25%

Exercice 5 : Sur une route principale où la vitesse est limitée à 80 km/h, un radar a mesuré la vitesse de toutes les voitures passées devant lui pendant une journée. On suppose qu'une loi normale de moyenne 72 km/h et avec un écart-type de 8km/h.

1) Quelle est la proportion de conducteurs qui devront payer une amende pour excès de vitesse ?

2) En plus de l'amende, un excès de plus de 30 km/h entraîne un retrait du permis. Quelle est la proportion de ceux qui se verront retirer leur permis parmi ceux qui auront eu une amende ?

3 Changement de variables

Exercice 6 : Soient X_1, X_2, X_3 des lois normales centrées réduites et définissons $Y = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$.

Calculer la fonction de répartition de Y et sa densité.

Cette distribution est un cas particulier de la loi du χ^2 (khi 2), ici avec 3 degrés de libertés.

Exercice 7 : Soit V une variable aléatoire distribuée selon une loi dite de Cauchy de densité :

$$f(v) = \frac{1}{\pi(1+v^2)}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Soit $Z := 1/V$. Calculer la densité de Z. Que remarquez-vous ?

Exercice 8 : Dans un atelier de céramique, on produit de petites plaques carrées de longueur L (en cm), vue comme une variable aléatoire dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} cx(10-x) & \text{si} \quad 0 < x < 10 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Calculer la valeur de c.

2) Calculer la fonction de densité de la surface S d'une plaque.

3) Calculer l'espérance et la fonction de répartition de S.

4 Problèmes

Exercice 9 : Un point est choisi au hasard dans une boule.

On se demande si la boule B_I centrée en ce point et tangente à la surface de la boule extérieure B_E peut représenter une grosse proportion du volume de B_E.

1) Avec quelle probabilité cette proportion est-elle plus petite que 5% ?

2) Calculer son espérance et son écart-type.

Exercice 10 : Un vendeur de journaux achète ses journaux 10 centimes et les revend 15 centimes. Cependant, il ne peut pas se faire rembourser les exemplaires invendus. La demande journalière est supposée suivre une loi normale avec 100 journaux de moyenne avec un écart-type de 7.

1) Si x est le nombre de journaux qu'il achète, donner l'espérance de son bénéfice comme fonction de s et de f_X, la fonction de densité de X.

2) Quelle est approximativement le nombre de journaux qu'il doit acheter afin de maximiser son bénéfice au long terme ?

Exercice 11 : Les pièces d'une voiture sont souvent copiées et vendues comme pièces originales. On suppose qu'on a acheté une pièce piratée avec un risque de 25%, donc qu'avec 75% de chance, la pièce est originale. La durée de vie des pièces est supposée suivre une loi exponentielle. Elle est en moyenne de 5 ans pour une pièce originale, contre seulement 2 ans pour une pièce piratée.

1) Quelle est la probabilité $\pi(t)$ que cette pièce soit piratée sachant qu'elle a survécu un temps t depuis son installation ?

2) Comment évolue $\pi(t)$ pour t tendant vers 0 ? vers $+\infty$?

3) Peut-on garantir la fiabilité de la pièce à plus de 95% après une certaine durée ? Si oui, à partir de quand ?