Exercices du TD6 : Théorèmes limites

1 Exercices élémentaires

Exercice 1 : Erreur dans la ligne de transmission
1) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de moyenne λ. Calculer $P(X = 0|$ X est pair).

2) Une ligne de transmission entre émetteur et récepteur transporte des données représentées par 1024 octets (soit 8 192 bits). La probabilité que la transmission d'un bit soit erronée est estimée à 10^{-5} et on admet que les erreurs sont indépendantes les unes des autres. On contrôle la qualité de la transmission avec un calcul de parité sur le nombre de 1 envoyés :

- s'il y a un nombre impair d'erreurs, un message d'erreur apparaît.
- sinon, c'est à dire si il y a un nombre pair d'erreurs, la transmission est acceptée.

Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune erreur sachant que la transmission est acceptée.

Exercice 2 : Fautes d'orthographes
On suppose qu'un étudiant fait en moyenne une faute d'orthographe tous les 500 mots. Quelle est la probabilité qu'il ne fasse pas plus de 5 fautes dans un texte contenant 200 mots ? dans un texte contenant 2000 mots ?

Exercice 3 : Prévisions pour la cantine
La cantine du lycée propose un plat avec de la viande ou un plat végétarien. On s'attend à ce que chaque élève opte pour la viande avec probabilité 0,80. Il y a 1200 élèves qui se rendent à la cantine. Combien faut-il prévoir de chaque plat pour que la probabilité que chaque élève trouve le plat de son choix soit supérieure à $0,99$?

Exercice 4 : Pierre-papier-ciseaux
Jacques cherche à gagner face à un algorithme de Pierre-papier-ciseaux. Il a élaboré une stratégie pour ajuster son coup suivant selon sa dernière réponse et celle de l'algorithme.
1) Montrer que si l'algorithme répond uniformément et indépendamment à chaque coup, la probabilité de gagner est de $1/3$ pour chaque coup de Jacques. Si on ne compte pas les nuls, montrer que la probabilité de gagner est $1/2$.
2) Pour savoir s'il peut trouver une stratégie optimale, il commence par tester que l'algorithme ne répond pas selon une telle loi uniforme. Il fait donc 300 parties, avec 482 coups. Il en gagne 157. Ce résultat de gains est-il compatible avec un algorithme uniforme avec une probabilité de 99% ?
3) Quelle a été la proportion de nuls ? Ce résultat de gains est-il compatible avec un algorithme uniforme avec une probabilité de 99% ?
4) Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Chebytchev.

2 Problèmes

Exercice 5 : Le genre tant attendu !

On suppose qu'à la naissance, la probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon est égale à $1/2$. On suppose que tous les couples ont des enfants jusqu'à obtenir un garçon. On souhaite évaluer la proportion de garçons dans une génération de cette population. On note X le nombre d'enfants d'un couple pris au hasard dans la population.

1) Donner la loi de la variable aléatoire X.

2) On suppose qu'une génération en âge de procréer est constituée de N couples, et on note $X_1, ..., X_N$ le nombre d'enfants respectif de chaque couple. On note enfin P la proportion de garçons issus de cette génération. Exprimer P en fonction de $X_1, ..., X_N$.

3) Que devient P lorsque N tend vers l'infini. Qu'en pensez-vous?

4) Estimer $\mathbb{P}(P \geq 0.55)$ pour $N = 100$.

5) Le sex-ratio des Indiens âgés entre 15 et 24 ans est de 113 hommes pour 100 femmes, ce qui conduit à s'interroger sur l'événement $P/(1-P) = 1.13$. Par ailleurs, il y a mondialement un sex-ratio à la naissance de 105 garçons pour 100 filles environs. A la louche, évaluons le nombre de couples en Inde à 300 millions. Evaluer $\mathbb{P}(\frac{P}{1-P} \geq 1.13)$ dans ce contexte.

Exercice 6 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendants de même loi et de carré intégrable. On note m leur espérance commune et σ^2 leur variance.

1)Étudier la convergence presque sûre de la suite

$$S_n = \frac{1}{n}(X_1X_2 + X_2X_3 + ... + X_{n-1}X_n + X_nX_{n+1}).$$

2*) Y-a-t-il un théorème central limite sur S_n ?