

Exercices du TD1 : Probabilités Discrètes

1 Calculs élémentaires de probabilité

Exercice 1 : Problème posé par le Chevalier de Méré à Pascal en 1654 :

Quel est l'événement le plus probable : obtenir au moins 1 fois 1 six en lançant 4 fois un dé ou obtenir au moins 1 fois 1 double six en lançant 25 fois 2 dés ?

Exercice 2 :

Le sultan dit à Ali Baba : "Voici 2 urnes, 4 boules blanches et 4 boules noires. Répartis ces boules dans les urnes puis je rendrai ces deux urnes indiscernables. Tire une boule noire et ma confiance te sera perdue : tu seras exclu de ce conseil!"

1) Quelle est la probabilité qu'Ali Baba puisse rester au conseil s'il place les 4 boules blanches dans la première urne et les 4 noires dans la deuxième ?

2) Idem avec 2 boules blanches et 2 noires dans chacune des urnes.

3) Idem avec 1 boules blanches et 2 noires dans la première et le reste dans la seconde.

4) Comment Ali Baba maximise-t-il ses chances de rester au conseil ?

Bonus : Le sultan se dit qu'il risque tout de même trop à perdre Ali Baba par hasard si celui-ci résout son énigme ! Il lui requiert donc maintenant de répéter l'épreuve et le gardera auprès de lui s'il tire assez de fois. Que doit-il exiger pour le renvoyer avec moins de 5% de probabilité ?

(seulement s'il s'est montré digne et astucieux !)

Exercice 3 :

Jeanne possède 5 clés parmi lesquelles une seule ouvre la porte. Elle les essaie au hasard en éliminant celles qui ne marchent pas. On pose X "le nombre d'essais pour ouvrir la porte".

1) Calculer la loi de probabilité de X , c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = k)$ avec k entre 1 et 5.

2) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.

Exercice 4 :

La fonction de répartition d'une variable X à valeurs entières est donnée par les formules suivantes :

$$F_X(n) = 1 - \frac{1}{n(n+1)}.$$

1) Calculer la moyenne de X .

2) Quelle est la loi de probabilité de X ?

3) Calculer la variance de X .

Exercice 5 :

Une variable aléatoire X à valeurs entières a pour fonction génératrice :

$$G_X(s) = k(3 + 2s^2)^3, \quad s \in [0, 1].$$

1) Quelle est la valeur de la constante de renormalisation k ? Comment décrire la loi de X le plus simplement possible ?

- 2) Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.

2 Bernoulli, Binomiale et Poisson

Exercice 6 :

Retrouver par les fonctions génératrices les propriétés suivantes :

- 1) La somme de deux lois Binomiales indépendantes de même probabilité de succès est encore une loi Binomiale avec la même probabilité de succès.
- 2) La somme de deux lois de Poisson indépendantes est encore une loi de Poisson.

Exercice 7 :

Un épicier reçoit un lot de pommes dont 20% sont avariées. Il charge un employé de préparer des emballages de 6 pommes chacun. Celui-ci, négligent ou cupide, ne se donne pas la peine de jeter les fruits avariés. Chaque client qui trouve, dans l'emballage qu'il achète, 2 fruits ou plus qui sont avariés, revient au magasin se plaindre.

- 1) Soit X le "nombre de pommes avariées dans un emballage". Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2) Quelle est la probabilité pour qu'un client donné se plaigne auprès de son épicier ?
- 3) Si l'épicier a 100 clients, combien peut-il escompter de plaintes ?
- 4) Sachant son employé de peu de confiance, l'épicier décide de prendre les devants et d'exiger que ses pommes soient triées. Ne pouvant pas tout examiner, il se fierà à un test sur un échantillon de pommes pour vérifier qu'elles ont été triées correctement. Si moins de 5% des clients viennent se plaindre, cela n'entachera pas la réputation du magasin. Quelle proportion de pommes avariées peut-il se permettre ?

Exercice 8 :

Une entreprise de meubles fait automatiquement le tri des paquets de vis qu'elle destine à ses clients. On estime qu'1 vis sur 25 n'est pas correctement triée (ou défectueuse).

- 1) 2 vis de secours sont prévues. Si le paquet contient plus de 3 vis défectueuse, le client ne peut pas finir de monter son meuble et va donc se plaindre. 1 client sur 6 s'est plaint. Combien de vis contiennent les paquets ?
- 2) Quelles performances de tri faudrait-il pour qu'au plus 1 client sur 20 vienne se plaindre ?
- 3) Combien de vis faudrait-il rajouter au paquet pour qu'au plus 1 client sur 20 vienne se plaindre ?

Exercice 9 :

1) Nadine part à la cueillette des champignons. Elle ne sait pas faire la différence entre un champignon comestible et un champignon toxique. On estime que la proportion des champignons toxiques se trouvant dans ces bois s'élève à 0,65.

(a) Nadine ramasse 7 champignons au hasard. Calculer la probabilité qu'elle ramasse exactement 4 champignons toxiques.

(b) Nadine invite Serge à sa cueillette. Serge connaît bien les champignons : sur 10 qu'il ramasse, 9 sont comestibles. Ce jour-là, il ramasse 4 champignons et Nadine en ramasse 6. Calculer la probabilité que 2 champignons au moins soient toxiques.

2) Serge ramasse en moyenne 11 champignons par heure.

(a) Calculer la probabilité qu'il ramasse exactement 8 champignons en une heure.

(b) Calculer la probabilité qu'il ramasse moins d'un champignon (inclus) en un quart d'heure.

Bonus : Pouvez-vous calculer avec quelle probabilité Serge arrive à bien distinguer qu'un champignon est toxique ? Commentaires souhaitables