Exercices du TD4 : Inégalités classiques

1 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 1 : Le nombre de pièces sortant d'une usine en une journée est une variable aléatoire d'espérance 50. On veut estimer la probabilité que la production de demain dépasse 75 pièces.

1) En utilisant l'inégalité de Markov, quelle estimation obtient-on sur cette probabilité ?

2) Que peut-on dire de plus sur cette probabilité si on sait que l'écart-type de la production quotidienne est 5 ?

Exercice 2 : Pour étudier les particules émises par une substance radioactive, on dispose d'un détecteur. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de particules qui atteignent le détecteur pendant un intervalle de temps Δt. Le nombre maximal de particules que le détecteur peut compter pendant un intervalle de temps Δt est de 10^3. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 10^2$. Donner une majoration de la probabilité que X dépasse 10^3.

Exercice 3 : En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout réel $x > 0$:

$$\int_0^x e^{-t^2/2} dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Exercice 4 : BORNES DE CHERNOFF

Soit X une variable aléatoire réelle. On définit une fonction ψ par $\psi(y) := \ln(E(e^{\lambda X}))$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On admettra que cette fonction est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Via l'inégalité de Markov, montrez que pour tout pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq e^{\psi(\lambda) - \lambda t}.$$

2) Supposons que X suit une loi normale $N(m, \sigma^2)$. Que vaut la fonction ψ ?

3) Pour quelle valeur de λ la fonction $\psi(\lambda) - \lambda t$ est-elle minimale ? Montrez que, si $t \geq m$,

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \exp\left[\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

3) On suppose maintenant que X suit une loi de Poisson de paramètre μ. Que vaut la fonction ψ ?

4) En déduire que, si $t \geq \mu$,

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \exp\left[-\mu\left(\frac{t}{\mu} - 1 - \frac{t}{\mu}\ln(\frac{t}{\mu})\right)\right].$$

2 Inégalité de Jensen

Exercice 5 : Pour une variable aléatoire X et $p \geq 1$, on définit $\|X\|_{L^p} := (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$. Il se trouve que ceci définit une norme sur l'espace L^p des variables aléatoires pour lesquelles cette quantité est finie.

Montrez que, pour tous $p, q \in [1, \infty)$, si $p \leq q$ alors $\|X\|_{L^p} \leq \|X\|_{L^q}$.

Exercice 6 : ENTROPIE D'UNE VARIABLE ALEATOIRE

On suppose ici que Ω est un ensemble dénombrable. Soit μ une loi de probabilité sur Ω. On suppose que $\mu(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$. On note X une variable aléatoire à valeurs dans Ω et de loi μ. On appelle entropie de Shannon de μ la quantité :

$$H(\mu) := \mathbb{E}(-\ln(\mu(X))) = -\sum_{\{\omega \in \Omega\}} \mu(\omega) \ln \mu(\omega),$$

où l'on pose que la fonction $h : x \mapsto x \ln(x)$ vaut 0 en 0.

1) Montrez que la fonction h est continue, convexe sur $[0, \infty)$, et négative sur $[0, 1]$.

2) Soit Ω' un autre ensemble dénombrable, et soit ν une loi de probabilité sur Ω'. On définit une loi de probabilité $\mu \otimes \nu$ sur $\Omega \times \Omega'$ par $\mu \otimes \nu(\omega, \omega') := \mu(\omega)\nu(\omega')$. Montrez que $H(\mu \otimes \nu) = H(\mu) + H(\nu)$.

3) Supposons que Ω est fini et de cardinal M. Montrez que la loi uniforme maximise l'entropie de Shannon sur Ω et donner la valeur de cette entropie maximale.

On veut montrer que parmi les lois sur $\mathbb{N}_*$ de même moyenne fixée, la loi géométrique maximise l'entropie.

4) Calculer l'entropie d'une loi géométrique.

5) Montrer par l'inégalité de Jensen que la quantité $D(\mu||\nu)$ est positive, où on définit :

$$D(\mu||\nu) := -\sum_{k \in \mathbb{N}_*} \mu(k) \ln\left(\frac{\nu(k)}{\mu(k)}\right).$$

Cette quantité est nommée la divergence de Kullback-Leibler (ou l'entropie relative) entre μ et ν et quantifie la dissimilarité entre ces deux distributions de probabilités.

6) En déduire que la loi géométrique maximise bien l'entropie parmi les lois qui ont la même moyenne.

Indication pour 3 : Considérer la variable aléatoire $\mu(W)$ où W est choisie uniformément sur Ω